



KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH GmbH

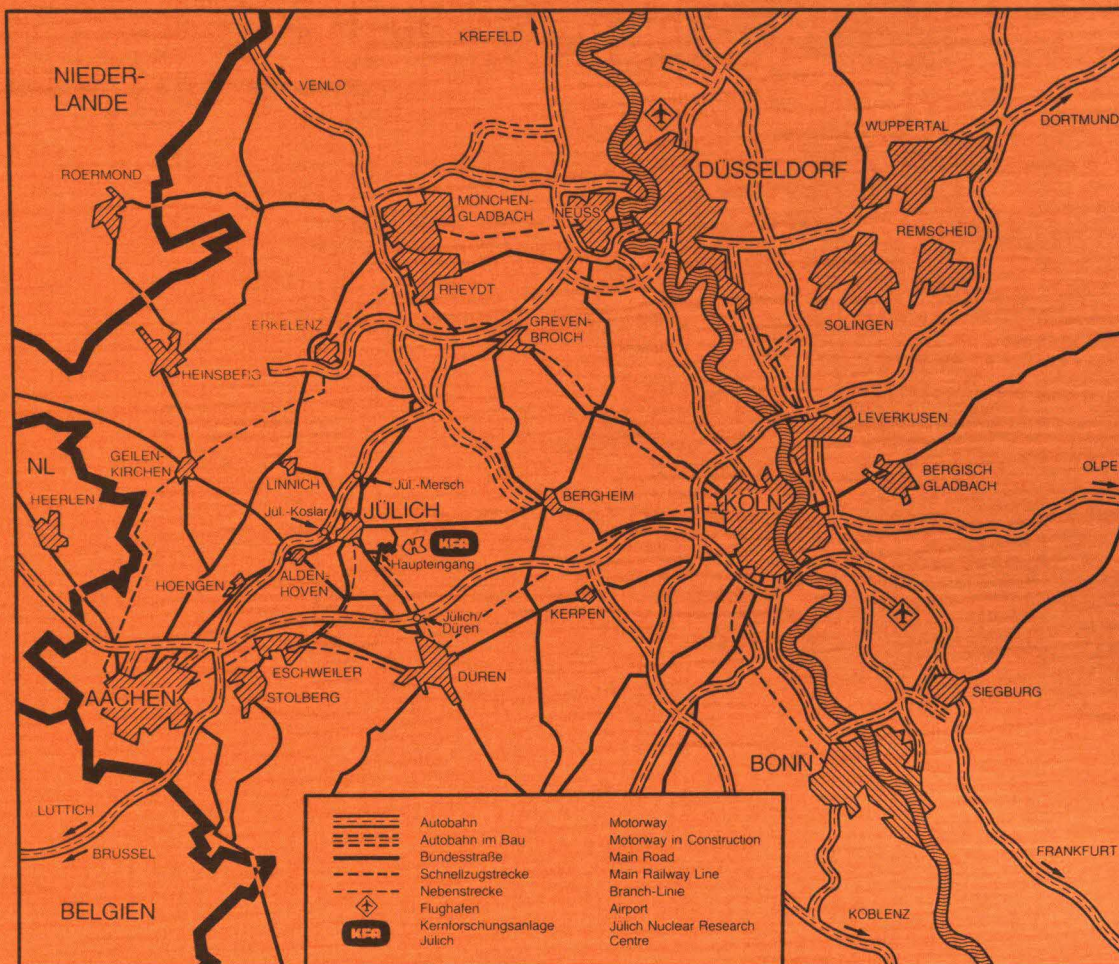
Institut für Plasmaphysik

**Analytische Berechnung
der transienten Proben temperatur
bei einem Xenon-Flash-Versuch
unter Berücksichtigung
der gemessenen Strahlungsintensität
der Xenon-Gasentladungsröhre**

von

B. Brandt

Jül-Spez-504
Juni 1989
ISSN 0343-7639



Als Manuskript gedruckt

Spezielle Berichte der Kernforschungsanlage Jülich – Nr. 504
 Institut für Plasmaphysik Jül-Spez-504

Zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich GmbH
 Postfach 19 13 · D-5170 Jülich (Bundesrepublik Deutschland)
 Telefon: 02461/610 · Telex: 833556-0 kf d

Analytische Berechnung der transienten Proben­temperatur bei einem Xenon-Flash-Versuch unter Berücksichtigung der gemessenen Strahlungsintensität der Xenon-Gasent- ladungsröhre

von B. Brandt

Zusammenfassung

Bei der experimentellen Bestimmung der Temperaturleitzahl nach der Xenon-Flash-Methode wird die Meßgenauigkeit bei dünnen Proben oder bei Werkstoffen mit großer Temperaturleitzahl in besonderem Maße von dem zeitlichen Verlauf der Strahlungsintensität der Xenon-Quelle bestimmt. Da es bisher für Xenon-Blitzlampen hinsichtlich ihres Zeitverhaltens keine zufriedenstellende Approximationsfunktion gibt, wird in der vorliegenden Arbeit eine analytische Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung vorgestellt, bei der die gemessene relative Strahlungsintensität jeder beliebigen Xenon-Gasentladungsröhre durch stückweise Approximation der Flußrandbedingung mit Exponentialfunktionen geschieht. Als Beispiel wird die rel. Strahlungsintensität einer 1000 Ws Xenon-Gasentladungsröhre gemessen und anschließend stückweise durch drei Exponentialfunktionen approximiert.

Die transiente Probentemperatur läßt sich im Falle der hier angenommenen Anfangs- bzw. Randbedingungen nach Profant, von Seggern u.a. /4/ in Form eines Faltungsintegrals angeben. Durch Auswahl von Exponentialfunktionen als Approximationsfunktionen für die rel. Strahlungsintensität der Quelle läßt sich das Faltungsintegral recht einfach geschlossen integrieren.

Weiterhin werden die transienten Vorgänge, die während eines Flash-Versuchs in der Probe ablaufen, aus systemtheoretischer Sicht diskutiert. Abschließend wird für den Fall, daß die Probendicke sehr kleine Werte annimmt, angegeben, welchen Grenzverlauf die transiente Probentemperatur annimmt und welche physikalischen Aussagen hieraus ableitbar sind.

Inhaltsverzeichnis

1.0 Einleitung	1
2.0 Herleitung einer analytischen Lösung zur Beschreibung der transienten Probentemperatur	4
3.0 Systemtheoretische Betrachtung der transienten Vorgänge	6
4.0 Bestimmung der transienten Probentemperatur für eine 1000 Ws Xenon-Gasentladungsröhre als Strahlungsquelle	9
5.0 Normierte Darstellung der transienten Probentemperatur	19
6.0 Ergebnisse und Diskussion	23
7.0 Verwendete Literatur	25
8.0 Anhang A: Pascal-Programm "X_FLASH"	27

1.0 Einleitung

Die Flash-Methode ist ein instationäres Meßverfahren zur Bestimmung der Temperaturleitzahl von Festkörpern. Sie wurde 1960 von Parker, Jenkins u.a. /1/ erstmals angewendet. Hierbei wird eine scheibenförmige Materialprobe an ihrer Frontseite durch kurzzeitige Bestrahlung z.B. mittels einer Xenon-Blitzquelle aufgeheizt. Aus der zeitverzögerten Temperaturerhöhung der Probenrückseite läßt sich dann die Temperaturleitzahl a nach folgender Beziehung bestimmen :

$$a = \frac{1.37 L^2}{\pi^2 t_{1/2}} \quad (1)$$

Außer der Probendicke L benötigt man noch die sogenannte $t_{1/2}$ -Zeit, das ist die Zeit, bei der die Temperaturerhöhung der Probenrückseite 50 % ihres Maximalwertes erreicht hat, siehe auch Abb. 1.

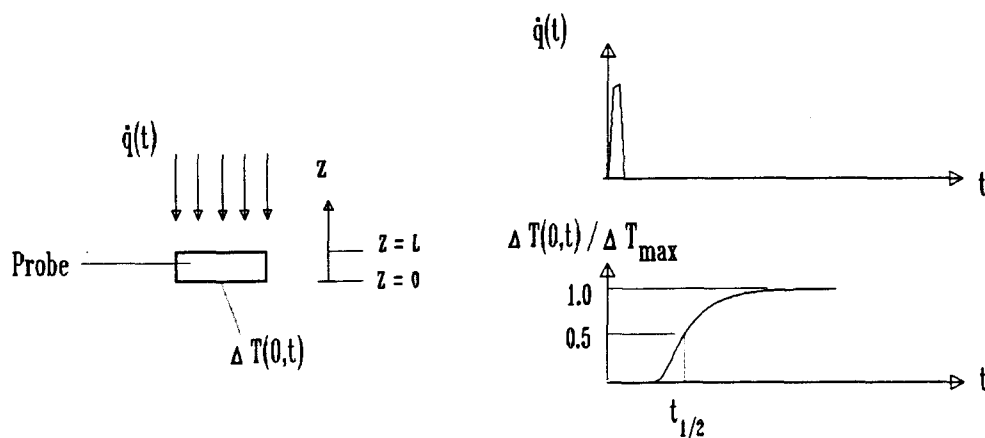


Abb. 1. Prinzip der Flash-Methode: Durch Messung der $t_{1/2}$ -Zeit läßt sich die Temperaturleitzahl a nach Gleichung (1) bestimmen.

Die mathematische Herleitung dieser Beziehung beinhaltet jedoch folgende Annahmen:

- eindimensionale Wärmeleitung
- der zeitliche Verlauf des Wärmeflusses ist eine Dirac-Verteilung
- gleichmäßige Aufheizung der Frontseite der Probe
- keine Wärmeverluste der Probe
- Temperaturunabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit, der spez. Wärmekapazität sowie der spez. Dichte

Da sich diese Forderungen beim einem Flash-Versuch nur näherungsweise erfüllen lassen, sind nach 1960 eine Reihe von theoretischen Untersuchungen durchgeführt worden, die das thermische Verhalten der Probe durch erweiterte mathematische Modelle, die weniger restriktive Nebenbedingungen beinhalten, beschreiben. So ist 1966 von Larson und Koyama /2/ eine analytische Lösung der Wärmeleitungsgleichung hergeleitet worden, die für den zeitlichen Verlauf des Wärmeflusses an der Frontseite der Probe an Stelle der Dirac-Verteilung eine Funktion der Form $\dot{q}(t) = \dot{q}_0 (t/t_p) e^{(1-t/t_p)}$ zuläßt, was dem typischen Zeitverlauf der Strahlungsintensität einer Xenon-Blitzröhre entspricht. Bei dem Versuch die gemessene Intensitätsverteilung der hier verwendeten 1000 Ws Xenon-Blitzquelle an diese Zeitfunktion anzupassen, stellt sich jedoch heraus, daß man mit den beiden frei wählbaren Parametern \dot{q}_0 bzw. t_p , keine ausreichende Übereinstimmung erzielen kann. In Abb. 2 auf Seite 3 ist die gemessene Strahlungsverteilung dieser Xenon-Blitzquelle sowie die Ansatzfunktion von Larson und Koyama dargestellt. Vergleicht man die Entladungskurven verschiedener Xenon-Blitzquellen, so wird ersichtlich, daß die Kurvenformen sowohl von der elektrischen Beschaltung als auch von der Geometrie der Blitzröhre abhängen /3/. Durch Auswahl spezieller Blitzröhren bzw. durch Änderung der elektrischen Beschaltung kann man die Anpassung zwar verbessern, aber eine exakte Übereinstimmung zwischen Meßkurve und dieser mathematischen Ansatzfunktion ist

nicht erreichbar. Auf den nachfolgenden Seiten wird deshalb eine analytische Lösung zur Beschreibung der transienten Probertemperatur hergeleitet, die eine andere Ansatzfunktion verwendet.

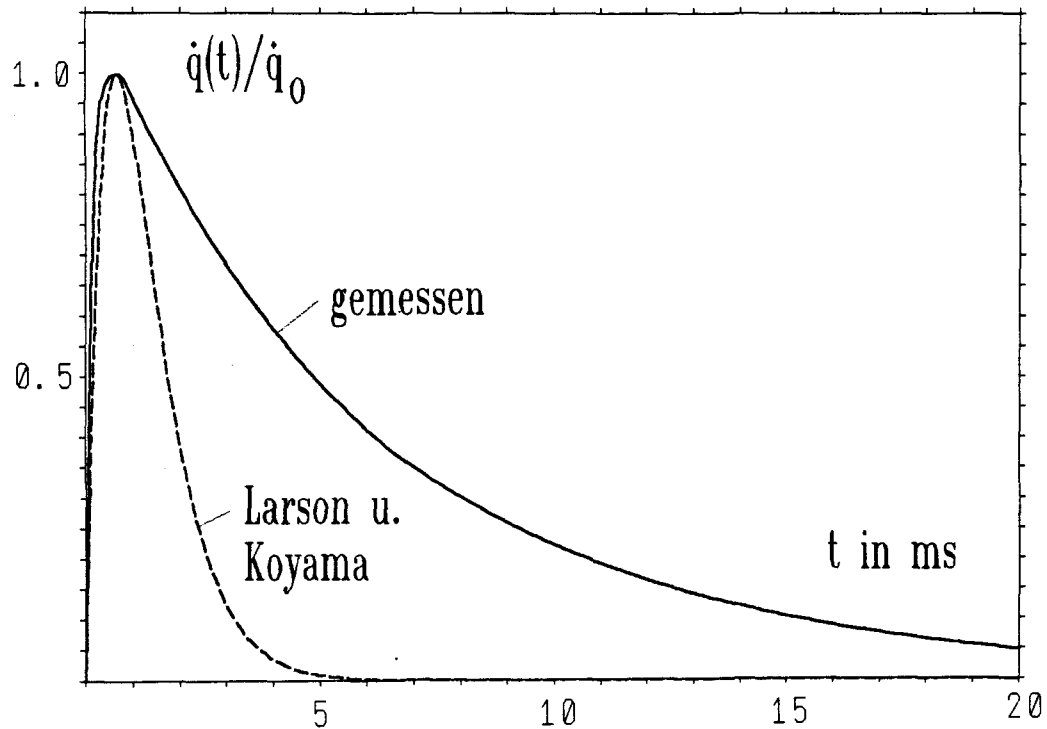


Abb. 2. Ansatzfunktion von Larson u. Koyama: Vergleich der gemessenen Strahlungintensität der verwendeten 1000 Ws Xenon-Blitzröhre und mathematische Approximation nach Larson u. Koyama mit $t_p = 0.65$ ms.

2.0 Herleitung einer analytischen Lösung zur Beschreibung der transienten Probentemperatur

Unter der Voraussetzung, daß die Frontseite der Probe gleichmäßig erwärmt wird, und alle Wärmeverluste durch Strahlung oder Wärmeableitung des Probenhalters vernachlässigt werden, ist die Probentemperatur nur noch von einer Ortskoordinate abhängig. Es sei weiterhin angenommen, daß die Wärmeleitfähigkeit konstant ist, d.h. die Temperaturänderung ΔT in der Probe vernachlässigbar klein ist im Vergleich zur absoluten Probentemperatur T . Die Fourier'sche Wärmeleitungsgleichung lautet dann mit a als Temperaturleitzahl wie folgt :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2)$$

mit

$$T(z,t) = T_{umg} \quad \text{für } t = 0 \quad (3)$$

und

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (4)$$

bzw.

$$\left. \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=L} = \dot{q}(t) \quad (5)$$

Hierbei ist λ die Wärmeleitfähigkeit und $\dot{q}(t)$ die Wärmestromdichte an der Frontseite der Probe. Als allgemeine Lösung erhält nach /4/ (Gleichung 2,7) für die Temperaturänderung in der Probe:

$$\Delta T(z,t) = \int_0^t \dot{q}(t') h(z,t-t') dt' \quad (6)$$

mit

$$h(z,t) = \frac{1}{\rho C_p L} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) e^{-n^2 t/t_c} \right\} \quad (7)$$

und

$$t_c = \frac{L^2}{\pi^2 a} \quad (8)$$

wobei ρ die spez. Dichte und C_p die spez. Wärmekapazität ist. Für den Fall, daß

$$\dot{q}(t) = q_{\max} \delta(t) \quad (9)$$

ist, d.h. eine Dirac-Verteilung mit

$$q_{\max} = \int_0^{\infty} \dot{q}(t) dt, \quad (10)$$

erhält man für die Temperaturerhöhung an der Probenrückseite die bereits von Parker und Jenkins /1/ verwendete Lösung

$$\Delta T_{\delta}(0,t) = \frac{q_{\max}}{\rho C_p L} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 t/t_c} \right\}. \quad (11)$$

3.0 Systemtheoretische Betrachtung der transienten Vorgänge

Die Systemtheorie wird vorwiegend in der Elektrotechnik benutzt, um instationäre Vorgänge besser beschreiben zu können. Da die Systemtheorie eine übergeordnete Betrachtungsweise ermöglicht sowie eine Vielzahl von Theoremen bereitstellt, eröffnet die Einbettung eines transienten Vorgangs in dieses Umfeld meist weitere Erkenntnisse. Deshalb wird nachfolgend aufgezeigt, daß sich die transienten Vorgänge bei einem Flash-Versuch auch systemtheoretisch darstellen lassen.

Die transiente Proben temperatur $\Delta T(z, t)$ wird durch ein Faltungsintegral beschrieben, wobei die Faltung zwischen $\dot{q}(t)$ und der Funktion $h(z, t)$, die in der Mathematik als Thetafunktion $\Theta_3(z, t)$ bekannt ist, im Zeitbereich ausgeführt wird. Betrachtet man diesen Zusammenhang aus der Sicht der Systemtheorie, so entspricht $\dot{q}(t)$ der Signalfunktion $s(t)$ am Eingang eines linearen, zeitinvarianten Systems (LTI-System, benannt nach engl. Schreibweise: linear time-invariant system) und $\Delta T(t)$ der Ausgangsfunktion $g(t)$, wobei die Raumkoordinate z als Parameter nicht mehr explizit auftritt. Für den Fall, daß $s(t)$ einer Dirac-Verteilung $\delta(t)$ entspricht, erhält man für $g(t)$ die sogenannte Stoßantwort $h(t)$, die das LTI-System vollständig beschreibt. Da die technische Realisation eines Dirac-Stoßes nur näherungsweise möglich ist, verwendet man in der Praxis die sogenannte Sprungantwort $h_s(t)$ zur Charakterisierung eines solchen Systems. Hierbei wird als Eingangssignal eine Sprungfunktion $\varepsilon(t)$ verwendet, wobei zwischen Stoßantwort und Sprungantwort folgende Beziehung gilt [5]:

$$h(t) = \frac{d}{dt} h_s(t) \quad (12)$$

Entsprechend gilt für die Signalfunktionen am Eingang:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} \varepsilon(t) \quad (13)$$

Für jede andere Eingangsfunktion $s(t)$ erhält man dann die Ausgangsfunktion $g(t)$ des LTI-Systems wie folgt:

$$g(t) = \int_0^t s(t') h(t-t') dt' . \quad (14)$$

Da diese Beziehungen, wie bereits erwähnt, nur für ein LTI-System gelten, wird nachfolgend aus /5/ (Seite 7 u. 8) zitiert, um aufzuzeigen, wann ein solches System vorliegt:

Lineare, zeitinvariante Systeme, kurz auch LTI-Systeme genannt, können ganz allgemein durch eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden. Die Eigenschaften dieser Systeme haben folgende Bedeutung:

a) **Linear** heißt ein System, wenn jede Linearkombination von Eingangssignalen $s_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) zu der entsprechenden Linearkombination von Ausgangssignalen $g_i(t)$ führt. Es muß daher für beliebige Konstanten a_i der Superpositionssatz erfüllt sein

$$F \left\{ \sum_{i=1}^n a_i s_i(t) \right\} = \sum_{i=1}^n a_i F \{ s_i(t) \} = \sum_{i=1}^n a_i g_i(t) . \quad (15)$$

b) **Zeitinvariant** oder stationär heißt ein System, wenn für jede beliebige Zeitverschiebung um t_0 gilt

$$F \{ s(t-t_0) \} = g(t-t_0) . \quad (16)$$

Mit anderen Worten, die Form des Ausgangssignals muß von einer zeitlichen Verschiebung des Eingangssignals unabhängig sein. Ende des Zitats.

Aus der Darstellung der transienten Proben­temperatur nach Gleichung (6) wird sofort ersichtlich, daß die Eigenschaften Linearität und Zeitinvarianz im vorliegenden Fall erfüllt sind, und ein LTI-System vorliegt. Weiterhin läßt sich aus systemtheoretischer Sicht sagen, daß die transiente Proben­temperatur nach Gleichung (11) nichts anderes als die Stoßantwort des Systems ist. Wie bereits erwähnt, erhält man durch Integration der Stoßantwort die Sprungantwort. Wendet man das auf die Gleichung (11) an, so erhält man die rel. Temperaturerhöhung an der Probenrückseite für den Fall, daß die Probenfrontseite durch einen Wärmefluß aufgeheizt wird, dessen zeitlicher Verlauf einer Sprungfunktion entspricht. Dieses Verfahren kann ebenfalls zur experimentellen Bestimmung der Temperaturleitzahl herangezogen werden. In der Literatur ist es als "Single-point Relaxation-time Methode" bekannt /6/.

4.0 Bestimmung der transienten Probentemperatur für eine 1000 Ws Xenon-Gasentladungsröhre als Strahlungsquelle

Im Falle einer Xenon-Blitzentladung läßt sich die Wärmestromdichte der Strahlungsquelle durch folgende Zeitfunktion gut annähern :

$$\dot{q}(t) = \begin{cases} \dot{q}_1(t) & 0 < t \leq t_1 \\ \dot{q}_2(t) & \text{für } t_1 < t \leq t_2 \\ \dot{q}_3(t) & t_2 < t \end{cases} \quad (17)$$

mit

$$\dot{q}_1(t) = \dot{q}_0 k_1 (1 - e^{-t/\tau_1}) \quad , \quad (18)$$

$$\dot{q}_2(t) = \dot{q}_0 e^{-(t-t_1)/\tau_2} \quad (19)$$

und

$$\dot{q}_3(t) = \dot{q}_0 k_2 e^{-(t-t_2)/\tau_3} \quad . \quad (20)$$

Aus der gemessenen Strahlungsintensität der 1000 Ws Xenon-Blitzquelle ergeben sich die folgenden Parameter:

$$\begin{aligned} t_1 &= 0.75 \text{ ms} & \tau_1 &= 0.10 \text{ ms} \\ t_2 &= 6.70 \text{ ms} & \tau_2 &= 5.95 \text{ ms} \\ & & \tau_3 &= 6.60 \text{ ms} \end{aligned}$$

Für die Messung wurde eine PIN-Diode (BPW 34) verwendet, deren maximale Empfindlichkeit bei 900 nm liegt. Unter Verwendung der Nebenbedingung $\dot{q}(t_1) = \dot{q}_0$ bzw. $\dot{q}(t)$ stetig für $t = t_2$ erhält man

$$k_1 = (1 - e^{-t_1/\tau_1})^{-1} \quad (21)$$

bzw.

$$k_1 = 1.0005$$

sowie

$$k_2 = e^{-(t_2 - t_1)/\tau_2} \quad (22)$$

bzw.

$$k_2 = 0.3678 .$$

In Abb. 3 auf Seite 11 ist die gemessenen -sowie die approximierte rel. Strahlungsintensität der Xenon-Blitzquelle als Zeitfunktion dargestellt.

Als geschlossene Lösung erhält man für $0 < t \leq t_1$

$$\Delta T_1(z, t) = \int_0^t \dot{q}_1(t') h(z, t - t') dt' , \quad (23)$$

bzw. für $t_1 < t \leq t_2$

$$\Delta T_2(z, t) = \int_0^{t_1} \dot{q}_1(t') h(z, t - t') dt' + \int_{t_1}^t \dot{q}_2(t') h(z, t - t') dt' \quad (24)$$

und für $t_2 < t$

$$\begin{aligned} \Delta T_3(z, t) = & \int_0^{t_1} \dot{q}_1(t') h(z, t - t') dt' + \int_{t_1}^{t_2} \dot{q}_2(t') h(z, t - t') dt' + \\ & \int_{t_2}^t \dot{q}_3(t') h(z, t - t') dt' . \end{aligned} \quad (25)$$

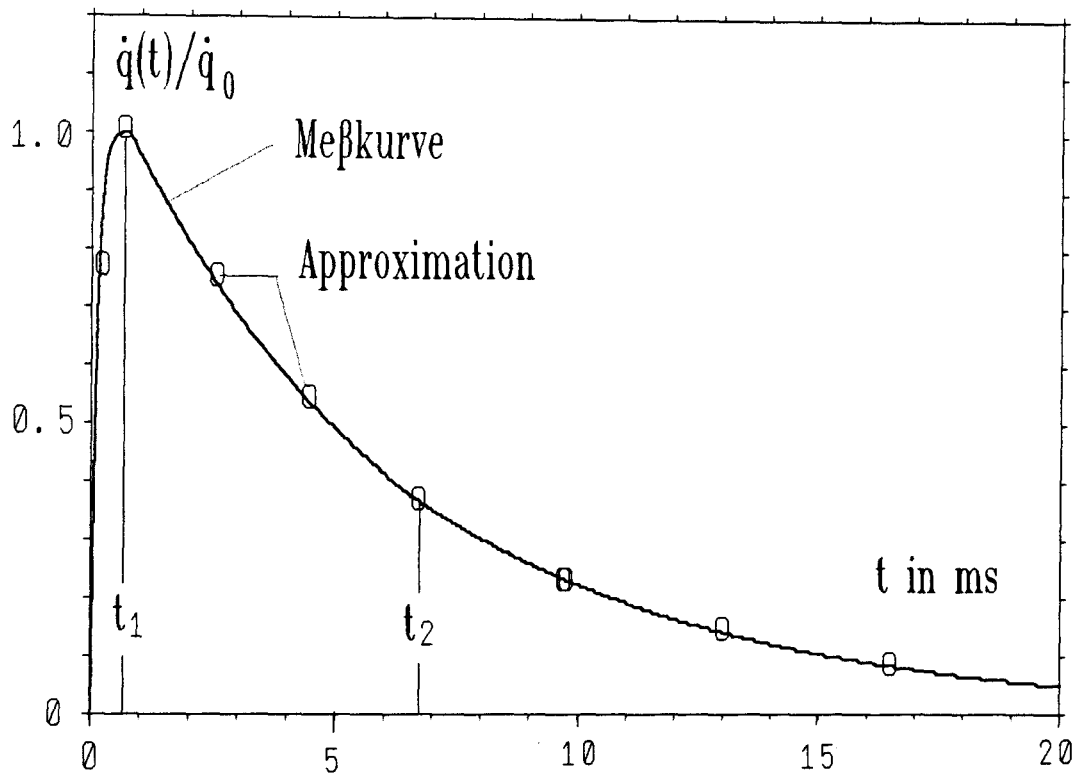


Abb. 3. Gemessene rel. Strahlungsintensität der 1000 Ws Xenon-Blitzquelle: Die mathematische Approximation verläuft deckungsgleich zu den Meßwerten.

Unter Verwendung von Gleichung (7) erhält man für $0 < t \leq t_1$

$$\Delta T_1(z, t) = \int_0^t \dot{q}_0 k_1 (1 - e^{-t'/\tau_1}) \frac{1}{\rho C_p L} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) e^{-n^2(t-t')/\tau_c} \right\} dt' , \quad (26)$$

bzw.

$$\Delta T_1(z,t) = \frac{\dot{q}_0}{\rho C_p L} \left\{ k_1 \int_0^t (1 - e^{-t'/\tau_1}) dt' + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) k_1 \int_0^t (1 - e^{-t'/t_1}) e^{-n^2(t-t')/t_2} dt' \right\} . \quad (27)$$

Mit

$$C_1 = \frac{\dot{q}_0}{\rho C_p L} , \quad (28)$$

$$s(n,z) = (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) , \quad (29)$$

$$l_{11}(t) = \int_0^t (1 - e^{-t'/\tau_1}) dt' \quad (30)$$

und

$$l_{12}(n,t) = \int_0^t (1 - e^{-t'/\tau_1}) e^{-n^2(t-t')/t_2} dt' \quad (31)$$

folgt:

$$\Delta T_1(z,t) = C_1 \left\{ k_1 l_{11}(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} s(n,z) k_1 l_{12}(n,t) \right\} . \quad (32)$$

Entsprechend erhält man für $t_1 < t \leq t_2$

$$\Delta T_2(z,t) = \int_0^{t_1} \dot{q}_0 k_1 (1 - e^{-t'/\tau_1}) \frac{1}{\rho C_p L} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) e^{-n^2(t-t')/t_2} \right\} dt' + \int_{t_1}^t \dot{q}_0 e^{-(t'-t_1)/\tau_2} \frac{1}{\rho C_p L} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) e^{-n^2(t-t')/t_2} \right\} dt' ,$$

(33)

bzw.

$$\begin{aligned}
\Delta T_2(z,t) = & \frac{\dot{q}_0}{\rho C_p L} \left\{ k_1 \int_0^{t_1} (1 - e^{-t'/\tau_1}) dt' + \right. \\
& 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) k_1 \int_0^{t_1} (1 - e^{-t'/\tau_1}) e^{-n^2(t-t')/\tau_c} dt' + \\
& \left. \int_{t_1}^t e^{-(t'-t_1)/\tau_2} dt' + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \int_{t_1}^t e^{-(t'-t_1)/\tau_2} e^{-n^2(t-t')/\tau_c} dt' \right\} .
\end{aligned}$$

(34)

Mit den Gleichungen (28,29) sowie mit

$$I_{21} = \int_0^{t_1} (1 - e^{-t'/\tau_1}) dt' , \quad (35)$$

$$I_{22}(n,t) = \int_0^{t_1} (1 - e^{-t'/\tau_1}) e^{-n^2(t-t')/\tau_c} dt' , \quad (36)$$

$$I_{23}(t) = \int_{t_1}^t e^{-(t'-t_1)/\tau_2} dt' \quad (37)$$

und

$$I_{24}(n,t) = \int_{t_1}^t e^{-(t'-t_1)/\tau_2} e^{-n^2(t-t')/\tau_c} dt' \quad (38)$$

folgt:

$$\Delta T_2(z,t) = C_1 \left\{ k_1 l_{21} + l_{23}(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} s(n,z) [k_1 l_{22}(n,t) + l_{24}(n,t)] \right\} . \quad (39)$$

Entsprechend erhält man für $t_2 < t$

$$\begin{aligned} \Delta T_3(z,t) = & \int_0^{t_1} \dot{q}_0 k_1 (1 - e^{-t'/\tau_1}) \frac{1}{\rho C_p L} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) e^{-n^2(t-t')/\tau_c} \right\} dt' + \\ & \int_{t_1}^{t_2} \dot{q}_0 e^{-(t'-t_1)/\tau_2} \frac{1}{\rho C_p L} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) e^{-n^2(t-t')/\tau_c} \right\} dt' + \\ & \int_{t_2}^t \dot{q}_0 k_2 e^{-(t'-t_2)/\tau_3} \frac{1}{\rho C_p L} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) e^{-n^2(t-t')/\tau_c} \right\} dt' \end{aligned} \quad (40)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \Delta T_3(z,t) = & \frac{\dot{q}_0}{\rho C_p L} \left\{ k_1 \int_0^{t_1} (1 - e^{-t'/\tau_1}) dt' + \right. \\ & 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) k_1 \int_0^{t_1} (1 - e^{-t'/\tau_1}) e^{-n^2(t-t')/\tau_c} dt' + \\ & \int_{t_1}^{t_2} e^{-(t'-t_1)/\tau_2} dt' + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \int_{t_1}^{t_2} e^{-(t'-t_1)/\tau_2} e^{-n^2(t-t')/\tau_c} dt' + \\ & \left. k_2 \int_{t_2}^t e^{-(t'-t_2)/\tau_3} dt' + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) k_2 \int_{t_2}^t e^{-(t'-t_2)/\tau_3} e^{-n^2(t-t')/\tau_c} dt' \right\} \end{aligned} \quad (41)$$

Mit den Gleichungen (28,29) sowie mit

$$I_{31} = \int_0^{t_1} (1 - e^{-t'/\tau_1}) dt' , \quad (42)$$

$$I_{32}(n,t) = \int_0^{t_1} (1 - e^{-t'/\tau_1}) e^{-n^2(t-t')/\tau_c} dt' , \quad (43)$$

$$I_{33} = \int_{t_1}^{t_2} e^{-(t-t')/\tau_2} dt' , \quad (44)$$

$$I_{34}(n,t) = \int_{t_1}^{t_2} e^{-(t-t')/\tau_2} e^{-n^2(t-t')/\tau_c} dt' , \quad (45)$$

$$I_{35}(t) = \int_{t_2}^t e^{-(t-t')/\tau_3} dt' \quad (46)$$

und

$$I_{36}(n,t) = \int_{t_2}^t e^{-(t-t')/\tau_3} e^{-n^2(t-t')/\tau_c} dt' \quad (47)$$

folgt:

$$\Delta T_3(z,t) = C_1 \left\{ k_1 I_{31} + I_{33} + k_2 I_{35}(t) + \right. \\ \left. 2 \sum_{n=1}^{\infty} s(n,z) [k_1 I_{32}(n,t) + I_{34}(n,t) + k_2 I_{36}(n,t)] \right\} . \quad (48)$$

Die Auflösung der Integrale ergibt:

$$I_{11}(t) = t + \tau_1 (e^{-t/\tau_1} - 1) \quad (49)$$

$$I_{12}(n, t) = \begin{cases} \frac{(1 - e^{-n^2 t / \tau_c})}{(n^2 / \tau_c)} + \frac{(e^{-n^2 t / \tau_c} - e^{-t / \tau_1})}{(n^2 / \tau_c - 1 / \tau_1)} & \text{für } \frac{n^2}{\tau_c} \neq \frac{1}{\tau_1} \\ \frac{(1 - e^{-n^2 t / \tau_c})}{(n^2 / \tau_c)} - t e^{-t / \tau_1} & \frac{n^2}{\tau_c} = \frac{1}{\tau_1} \end{cases} \quad (50)$$

$$I_{21}(t) = t_1 + \tau_1 (e^{-t/\tau_1} - 1) \quad (51)$$

$$I_{22}(n, t) = \begin{cases} \frac{(e^{-n^2(t-t_1)/\tau_c} - e^{-n^2 t / \tau_c})}{(n^2 / \tau_c)} + \frac{(e^{-n^2 t / \tau_c} - e^{-n^2(t-t_1)/\tau_c - t_1 / \tau_1})}{(n^2 / \tau_c - 1 / \tau_1)} & \text{für } \frac{n^2}{\tau_c} \neq \frac{1}{\tau_1} \\ \frac{(e^{-n^2(t-t_1)/\tau_c} - e^{-n^2 t / \tau_c})}{(n^2 / \tau_c)} - t_1 e^{-t / \tau_1} & \frac{n^2}{\tau_c} = \frac{1}{\tau_1} \end{cases} \quad (52)$$

$$I_{23}(t) = \tau_2 (1 - e^{-(t-t_1)/\tau_2}) \quad (53)$$

$$I_{24}(n, t) = \begin{cases} \frac{(e^{-(t-t_1)/\tau_2} - e^{-n^2(t-t_1)/\tau_c})}{(n^2 / \tau_c - 1 / \tau_2)} & \text{für } \frac{n^2}{\tau_c} \neq \frac{1}{\tau_2} \\ -(t - t_1) e^{-(t-t_1)/\tau_2} & \frac{n^2}{\tau_c} = \frac{1}{\tau_2} \end{cases} \quad (54)$$

$$I_{31} = I_{21}(t) \quad (55)$$

$$I_{32}(n, t) = I_{22}(n, t) \quad (56)$$

$$I_{33} = \tau_2 (1 - e^{-(t_2 - t_1)/\tau_2}) \quad (57)$$

$$I_{34}(n, t) = \begin{cases} \frac{(e^{-(t_2 - t_1)/\tau_2 - n^2(t - t_2)/t_c} - e^{-n^2(t - t_1)/t_c})}{(n^2/t_c - 1/\tau_2)} & \text{für } \frac{n^2}{t_c} \neq \frac{1}{\tau_2} \\ -(t_2 - t_1) e^{-(t - t_1)/\tau_2} & \frac{n^2}{t_c} = \frac{1}{\tau_2} \end{cases} \quad (58)$$

$$I_{35}(t) = \tau_3 (1 - e^{-(t - t_2)/\tau_3}) \quad (59)$$

$$I_{36}(n, t) = \begin{cases} \frac{(e^{-(t - t_2)/\tau_3} - e^{-n^2(t - t_2)/t_c})}{(n^2/t_c - 1/\tau_3)} & \text{für } \frac{n^2}{t_c} \neq \frac{1}{\tau_3} \\ (t - t_2) e^{-(t - t_2)/\tau_3} & \frac{n^2}{t_c} = \frac{1}{\tau_3} \end{cases} \quad (60)$$

Als geschlossene Lösung erhält man mit (28,32,39 u. 48) für

$$0 < t \leq t_1$$

$$\Delta T_1(z, t) = \frac{\dot{q}_0}{\rho C_p L} \left\{ k_1 I_{11}(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} s(n, z) k_1 I_{12}(n, t) \right\} \quad (61)$$

bzw. für $t_1 < t \leq t_2$

$$\Delta T_2(z, t) = \frac{\dot{q}_0}{\rho C_p L} \left\{ k_1 I_{21} + I_{23}(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} s(n, z) [k_1 I_{22}(n, t) + I_{24}(n, t)] \right\} \quad (62)$$

und für $t_2 < t$

$$\Delta T_3(z,t) = \frac{\dot{q}_0}{\rho C_p L} \left\{ k_1 l_{31} + l_{33} + k_2 l_{35}(t) + \right. \\ \left. 2 \sum_{n=1}^{\infty} s(n,z) [k_1 l_{32}(n,t) + l_{34}(n,t) + k_2 l_{36}(n,t)] \right\} .$$

(63)

5.0 Normierte Darstellung der transienten Probentemperatur

Bei Normierung auf den stationären Endwert der Temperaturerhöhung erhält man

$$g(z,t) = \frac{\Delta T(z,t)}{\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta T(z,t)} \quad (64)$$

mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta T(z,t) = \frac{q_{\max}}{\rho C_p L} \quad (65)$$

Unter Verwendung von $q_{\max} = \int_0^{\infty} \dot{q}(t) dt$ und den Gleichungen (17 - 20) gilt

$$q_{\max} = \dot{q}_0 \left\{ k_1 [t_1 + \tau_1 (e^{-t_1/\tau_1} - 1)] + \tau_2 (1 - e^{-(t_2-t_1)/\tau_2}) + k_2 \tau_3 \right\} . \quad (66)$$

bzw.

$$q_{\max} = \dot{q}_0 \times 6.84 \text{ ms} .$$

Somit ergibt sich für $0 < t \leq t_1$

$$g_1(z,t) = \frac{1}{6.84 \text{ ms}} \left\{ k_1 l_{11}(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} s(n,z) k_1 l_{12}(n,t) \right\} \quad (67)$$

bzw. für $t_1 < t \leq t_2$

$$g_2(z,t) = \frac{1}{6.84 \text{ ms}} \left\{ k_1 l_{21} + l_{23}(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} s(n,z) (k_1 l_{22}(n,t) + l_{24}(n,t)) \right\} \quad (68)$$

und für $t_2 < t$

$$g_3(z,t) = \frac{1}{6.84 \text{ ms}} \left\{ k_1 I_{31} + I_{33} + k_2 I_{35}(t) + \right. \\ \left. 2 \sum_{n=1}^{\infty} s(n,z) [k_1 I_{32}(n,t) + I_{34}(n,t) + k_2 I_{36}(n,t)] \right\} .$$

(69)

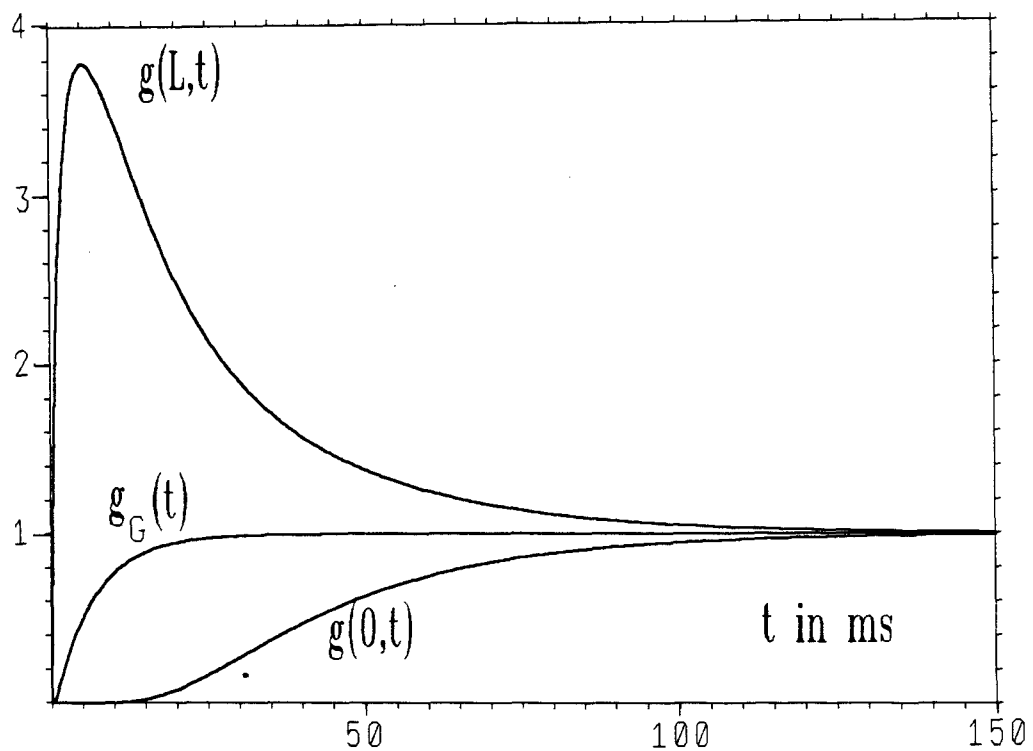


Abb. 4. Rel. Temperaturänderung der Probe: $g(L,t)$ und $g(0,t)$ zeigen den berechneten Verlauf der rel. Temperaturänderung an der Front- bzw. Rückseite der Probe für die verwendete Xenon-Blitzquelle ($t_c = 25.4 \text{ ms}$, z.B. 0.5 cm dicke Kupferscheibe).

Für den Grenzfall, daß die Probendicke sehr klein ist, erhält man aus der Energiebilanz

$$\Delta T_G(t) = \frac{1}{\rho C_p L} \int_0^t \dot{q}(t') dt' , \quad (70)$$

oder mit Gleichung (64)

$$g_G(t) = \frac{1}{q_{\max}} \int_0^t \dot{q}(t) dt \quad (71)$$

bzw. mit den Gleichungen (17-20, 30, 35, 37, 42, 44, 46 u. 66)

$$g_G(t) = \frac{1}{6.84 \text{ ms}} \begin{cases} k_1 l_{11}(t) & 0 < t \leq t_1 \\ k_1 l_{21} + l_{23}(t) & \text{für } t_1 < t \leq t_2 \\ k_1 l_{31} + l_{33} + k_2 l_{35}(t) & t_2 < t \end{cases} \quad (72)$$

D.h. die rel. Temperaturänderung an der Front- bzw. Rückseite der Probe ist nahezu gleich und gibt den integralen Zeitverlauf der Wärmestromdichte $\dot{q}(t)$ der Strahlungsquelle wieder. Somit kennzeichnet $g_G(t)$ lediglich das Zeitverhalten der verwendeten Strahlungsquelle und enthält keinerlei Information bezügl. der thermischen Leitfähigkeit der Probe, siehe auch Abb. 4 auf Seite 20.

Würde man trotzdem formal für die verwendete Xenon-Blitzquelle eine $t_{1/2}$ -Zeit aus der rel. Temperaturänderung an der Probenrückseite bestimmen, so erhält man aus $g_G(t_{1/2}) = 0.5$ den Minimalwert :

$$t_{1/2 \min} = t_1 + \tau_2 \ln \left\{ 1 - \tau_2^{-1} \left(\frac{q_{\max}}{2 \dot{q}_0} - k_1(t_1 + \tau_1 (e^{-t_1/\tau_1} - 1)) \right) \right\}^{-1} \quad (73)$$

bzw.

$$t_{1/2 \min} = 4.48 \text{ ms} .$$

6.0 Ergebnisse und Diskussion

Wie am Beispiel einer 1000 Ws Xenon-Blitzlampe gezeigt werden konnte, läßt sich der zeitliche Verlauf der Strahlungsquelle sehr gut durch stückweise Approximation der Flußrandbedingung mit drei Exponentialfunktionen berücksichtigen. Hierbei stehen fünf Parameter zur Anpassung an den zeitlichen Verlauf der Strahlungsintensität zur Verfügung, was für den vorliegenden Fall völlig ausreichend ist. Weiterhin kann man feststellen, daß sich durch geeignete Wahl dieser fünf Parameter ebenfalls das zeitliche Entladungsverhalten anderer Xenon-Blitzlampen beschreiben läßt. Zur Überprüfung dieser Aussage wurde eine 100 Ws Xenon-Blitzlampe (Metz CT-45), die einen wesentlich kürzeren Strahlungspuls aufweist, untersucht, und es zeigte sich, daß man wiederum eine gute Übereinstimmung zwischen der Approximationsfunktion und dem gemessenen zeitlichen Verlauf der rel. Strahlungsintensität der Quelle erhält.

Für die experimentelle Ermittlung der Temperaturleitzahl nach der Flash-Methode hat man somit die Möglichkeit bei dünnen Proben, anstelle eines kostenintensiven Festkörper-Lasers, eine Xenon-Blitzquelle einzusetzen. Denn eine der Ursachen, weshalb man Laser als Flash-Quellen einsetzt, besteht darin, daß ihre Pulszeit (ca. 1 ms), um Faktor 10 bis 20 geringer ist, als die einer Xenon-Blitzlampe; was dann von Bedeutung ist, wenn die genaue Pulsform des Flash-Signals nicht berücksichtigt werden kann, und man die Temperaturleitzahl nur an Hand der Gleichung (1) bestimmt. Diese Auswertung setzt voraus, daß die Pulszeit des Flash-Signals sehr viel kleiner ist als die sogenannte $t_{1/2}$ -Zeit, siehe auch Seite 1.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß die stückweise Approximation der Flußrandbedingung mit Exponentialfunktionen neben der speziellen Anwendung, die hier diskutiert worden ist, auch für andere Problemstellungen, bei denen ein zeitabhängiger Wärmefluß vorliegt, geeignet ist.

7.0 Verwendete Literatur

- /1/ W.J. Parker, R.J. Jenkins et al, J. of Appl. Phys., Vol. 32, Nr. 9 (1961) 1679
- /2/ K.B. Larson and K. Koyama, J. of Appl. Phys., Vol. 38, Nr. 2 (1967) 465
- /3/ J.P. Markiewicz and J.L. Emmett, IEEE J. of Quantum Electronics, Vol. QE-2, Nr. 11 (1966) 707
- /4/ M. Profant, R. von Seggern et al, Berichte der Kernforschungsanlage Jülich, Jül-2029, (1985)
- /5/ H.D. Lüke, Signalübertragung, Springer-Verlag, Berlin, 1975
- /6/ G. Sonnenschein, and R.A. Winn, "A Relaxation Time Technique for Measurement of Thermal Diffusivity", WDAC Tech. Rept., 59-273, 1-23, February 1960

8.0 Anhang A: Pascal-Programm "X_FLASH"

Das Programm berechnet die transiente Probentemperatur für eine 1000 Ws Xenon-Gasentladungsröhre als Flash-Quelle und nähert die gemessene rel. Strahlungsin-
tensität durch drei Exponentialfunktionen stückweise an.

```
program Xenon_Flash(INP,OUT,OUTD);

Var INP,OUT,OUTD:TEXT;

    t,dt,x,k1,k2,tz_1,tz_2,tz_3,t_1,t_2,
    t_c,a,L,
    I_11,I_12,
    I_21,I_22,I_23,I_24,
    I_31,I_32,I_33,I_34,I_35,I_36,
    s,sum,g,q_n,f1_max,f2_max,n,Pi:real;

    i,vorz,i_werte:integer;

    daten:array(.1..2,1..1000.) of real;

begin

    i_werte := 301      (* Anzahl der zuberechnenden Werte      *);

    (* ----- Pulsform der 1000 Ws-Quelle ----- *)

    t_1      := 0.00075  (* Zeit fuer q = q0      in      s      *);
    t_2      := 0.00670  (*                        in      s      *);

    tz_1     := 0.00010  (* Zeitkonstante        in      s      *);
    tz_2     := 0.00595  (* Zeitkonstante        in      s      *);
    tz_3     := 0.00660  (* Zeitkonstante        in      s      *);

    (* ----- Startwerte ----- *)

    (* Rueckseite: x = 0 *)

    L        := 0.50     (* Probendicke          in      cm      *);
    x        := 0.0      (* Ortskoordinate       in      cm      *);

    a        := 0.63     (* Temperaturleitzahl    in      cm*cm/s  *);

    dt       := 1.0E-3   (* Zeitschritt          in      s      *);

    f1_max   := 1E-9     (* Fehlergrenze fuer Reihe      *);
    f2_max   := 1E-9     (* Fehlergrenze fuer Reihe      *);
```

```

Pi      := 4*arctan(1.0);

t_c     := Sqr(L/Pi)/a  (* Charakteristische Zeitkonstante in s *);

k1      := 1.0/(1.0 - exp(-t_1/tz_1))      ;
k2      := exp(-(t_2-t_1)/tz_2)           ;

(* ----- Berechnung von g(t) ----- *)

(*
   g    = dT(t) / ( c1 * c2 )           mit c1 * c2 = dT fuer t --> oo
                                           d.h. stationaerer Endwert

   q_n  = q / qo                       qo = max. Waermestromdichte
                                           in W/(cm*cm)
*)

t := 0.0          (* Startzeit in s *);

for i := 1 to i_werte do
begin
  if t <= t_1 then
  begin
    if t = 0 then
    begin
      g := 0 ;
      q_n := 0 ;
    end
    else
    begin

      I_11    := t + tz_1 * (exp(-t/tz_1) - 1.0);

      g       := k1 * I_11 ;

      (* ----- Berechnung der Summe n = 1 ..oo ----- *)

      n       := 1.0 ;

      sum     := 0;  vorz := (-1);

      repeat
      begin
        if (n*n*t/t_c) < 100.0 then
        begin
          if (n*n/t_c - 1.0/tz_1) <> 0 then
            I_12 := (1.0 - exp(-n*n*t/t_c)) / (n*n/t_c)
                  + (exp(-n*n*t/t_c) - exp(-t/tz_1)) /
                    (n*n/t_c - 1.0/tz_1)
          else
            I_12 := (1.0 - exp(-n*n*t/t_c)) /
                    (n*n/t_c - t * (exp(-t/tz_1)));
          end
        else

```



```

I_12 := (1.0 - 0.0 ) / (n*n/t_c)
        + (0.0 - exp(-t/tz_1)) /
        (n*n/t_c - 1.0/tz_1);

s := vorz * cos(n*Pi*x/L) * k1 * I_12;

sum := sum + s ;

vorz:=vorz*(-1);
n:= n+1;
end;
until abs(s) < fl_max ;

(* ----- Ende der Summe ----- *)

g := g + 2.0 * sum ;

g := g / ( k1 * (t_1 + tz_1 * (exp(-t_1/tz_1)-1.0))
          + tz_2 * (1.0 - exp(-(t_2-t_1)/tz_2))
          + k2 * tz_3 );

q_n:= k1 * (1.0 - exp(-t/tz_1)) ;

end;
end
else
if t <= t_2 then
begin

I_21 := t_1 + tz_1 * (exp(-t_1/tz_1) - 1.0);

I_23 := tz_2 * (1.0 - exp(-(t-t_1)/tz_2));

g := (k1 * I_21 + I_23) ;

(* ----- Berechnung der Summe n = 1 .. oo -----*)

n := 1;

sum := 0; .vorz := (-1);

repeat
begin
if (n*n*t/t_c) < 100.0 then
begin
if (n*n/t_c - 1.0/tz_1) <> 0 then
I_22 := (exp(-n*n*(t-t_1)/t_c) - exp(-n*n*t/t_c)) /
        (n*n/t_c)
        + (exp(-n*n*t/t_c)
        - exp(-n*n*(t-t_1)/t_c - t_1/tz_1)) /
        (n*n/t_c - 1.0/tz_1)
else
I_22 := (exp(-n*n*(t-t_1)/t_c) - exp(-n*n*t/t_c)) /
        (n*n/t_c)

```

```

        - t_1 * exp(- t/tz_1);

    if (n*n/t_c - 1.0/tz_2) <> 0 then
        I_24 := (exp(-(t-t_1)/tz_2) - exp(-n*n*(t-t_1)/t_c)) /
                (n*n/t_c - 1.0/tz_2)
    else
        I_24 := - (t - t_1) * exp(-(t-t_1)/tz_2);
    end
    else
    begin
        I_22 := 0.0 ;
        I_24 := (exp(-(t-t_1)/tz_2) - 0.0 ) /
                (n*n/t_c - 1.0/tz_2);
    end;

    s      := vorz * cos(n*Pi*x/L) * (k1 * I_22 + I_24);
    sum     := sum + s ;

    vorz:=vorz*(-1);
    n:= n+1;
end;
until abs(s) < f2_max ;

(* ----- Ende der Summe ----- *)

g := g + 2.0 * sum ;

g := g / (      k1 * (t_1 + tz_1 * (exp(-t_1/tz_1)-1.0))
            + tz_2 * (1.0 - exp(-(t_2-t_1)/tz_2))
            + k2 * tz_3 );

q_n:= exp(-(t-t_1)/tz_2) ;

end
else
begin

    I_31      := t_1 + tz_1 * (exp(-t_1/tz_1) - 1.0);
    I_33      := tz_2 * (1.0 - exp(-(t_2-t_1)/tz_2));
    I_35      := tz_3 * (1.0 - exp(-(t-t_2)/tz_3));

    g      := (k1 * I_31 + I_33 + k2 * I_35) ;

    (* ----- Berechnung der Summe n = 1 .. oo -----*)

    n      := 1;

    sum     := 0;  vorz := (-1);

    repeat

```

```

begin
  if (n*n*t/t_c) < 100.0 then
    begin
      if (n*n/t_c - 1.0/tz_1) <> 0 then
        I_32 := (exp(-n*n*(t-t_1)/t_c) - exp(-n*n*t/t_c)) /
          (n*n/t_c)
          + (exp(-n*n*t/t_c)
            - exp(-n*n*(t-t_1)/t_c - t_1/tz_1)) /
          (n*n/t_c - 1.0/tz_1)
      else
        I_32 := (exp(-n*n*(t-t_1)/t_c) - exp(-n*n*t/t_c)) /
          (n*n/t_c)
          - t_1 * exp(- t/tz_1);
      if (n*n/t_c - 1.0/tz_2) <> 0 then
        I_34 := (exp(-(t_2-t_1)/tz_2 - n*n*(t-t_2)/t_c)
          - exp(-n*n*(t-t_1)/t_c)) / (n*n/t_c - 1.0/tz_2)
      else
        I_34 := - (t_2 - t_1) * exp(-(t-t_1)/tz_2);
      if (n*n/t_c - 1.0/tz_3) <> 0 then
        I_36 := (exp(-(t-t_2)/tz_3) - exp(-n*n*(t-t_2)/t_c)) /
          (n*n/t_c - 1.0/tz_3)
      else
        I_36 := - (t - t_2) * exp(-(t-t_2)/tz_3);
    end
  else
    begin
      I_32 := 0.0 ;
      I_34 := 0.0 ;
      I_36 := (exp(-(t-t_2)/tz_3) - 0.0 ) / (n*n/t_c - 1.0/tz_3);
    end;

    s := vorz * cos(n*Pi*x/L) * (k1 * I_32 + I_34 + k2 * I_36);

    sum := sum + s ;

    vorz:=vorz*(-1);
    n:= n+1;
  end;
until abs(s) < f2_max ;

(* ----- Ende der Summe ----- *)

g := g + 2.0 * sum ;

g := g / (
  k1 * (t_1 + tz_1 * (exp(-t_1/tz_1)-1.0))
  + tz_2 * (1.0 - exp(-(t_2-t_1)/tz_2))
  + k2 * tz_3 );

q_n:= k2 * exp(-(t-t_2)/tz_3) ;

end;

(* ----- Ende der Berechnung von g(t) ----- *)

```

```

writeln(out,t:9:8,'          ',g:9:8);

daten(.1,i.) := t;

daten(.2,i.) := g;

t := t + dt ;
end;

(* ----- Abspeichern der Daten auf X_FLASH DAT ----- *)

for i:=1 to i_werte do
begin
writeln(OUTD,daten(.1,i.):6:4,'          ',daten(.2,i.):6:4);
end;
end.

```

Graphische Ausgabe des Programms X_FLASH PASCAL

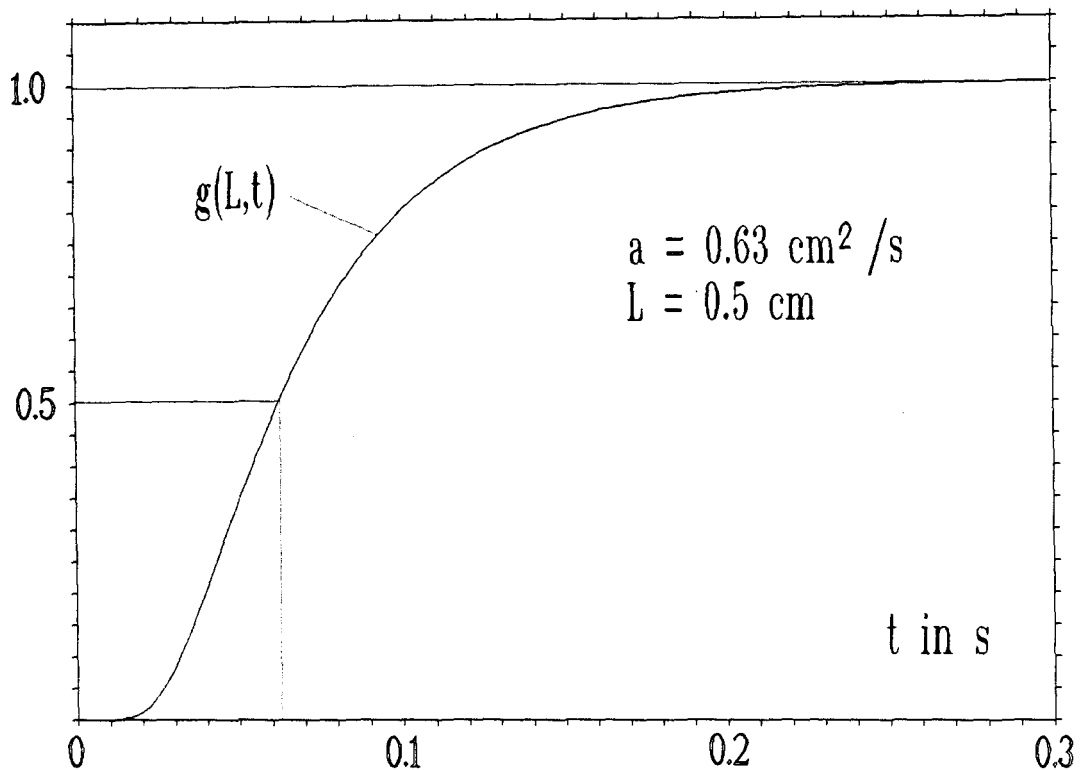


Abb. 5. Rel. Temperaturänderung an der Probenrückseite: $g(L,t)$ zeigt den berechneten Verlauf der rel. Temperaturänderung an der Rückseite der Probe für die verwendete 1000 Ws Xenon-Blitzquelle ($a = 0.63 \text{ cm}^2/\text{s}$, $L = 0.5 \text{ cm}$).

